Ders (3)

ANALİZ YÖNTEMLERİ :

DÜĞÜM ANALİZİ

Amaç: Düğümlerdeki voltaj değerlerini kullanarak devre analizini daha az değişken veya denklemle yapmamızı sağlayan bir yöntemdir.

Neyi buluyoruz? ⇒ Düğümlerdeki gerilimleri bulmayı hedefliyoruz.

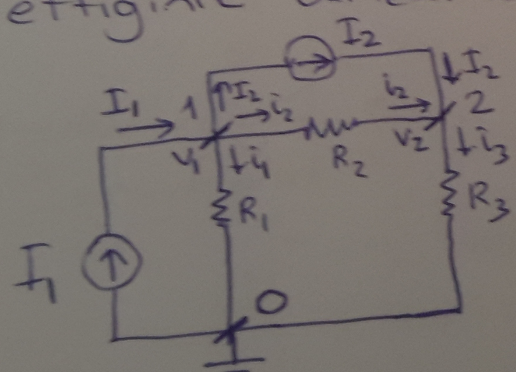
A-) Voltaj kaynağı Olmayan Devrelerde Düğüm Analizi ;

Takip etmemiz gereken adımlar ;

(1): n tane düğüm noktası olsun. Bunlardan birini kaynak düğüm noktası olarak seç. Geri kalan düğüm noktalarına $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ voltaj değerlerini kaynak düğüme göre ata.

(2): Kaynak düğüm noktası olmayan düğümlerde KCL yi uygula ve Ohm Kanununu kullanarak kollardaki akımları düğüm voltajlarına göre tanımla.

(3): Bilinmeyen düğüm gerilimlerini bulmak için elde ettiğiniz denklemleri çözünüz.



(1) ve (2) nolu kaynak olmayan düğümlerde KCL uygulanırsa ;

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= I_2 + i_1 + i_2 \\ I_2 + i_2 &= i_3 \end{aligned}\right\rangle$$ elde edilir. . . . (1)

Şimdi de, Ohm kanununu kullanarak kollardaki akımları voltajlar türünden ifade edelim.

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{V_1 - 0}{R_1} = \frac{V_1}{R_1} = G_1 V_1 \\ i_2 &= \frac{V_1 - V_2}{R_2} = G_2 (V_1 - V_2) \\ i_3 &= \frac{V_2 - 0}{R_3} = \frac{V_2}{R_3} = G_3 V_2 \end{aligned}\right\rangle$$ elde ederiz. . . . (2)

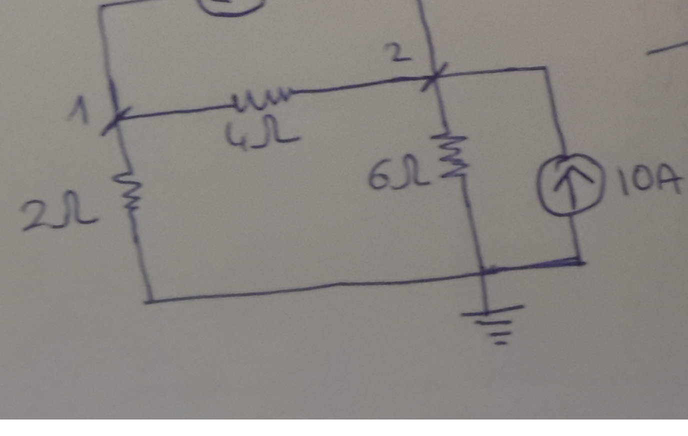
(2)'deki değerler (1)'de yerine konulursa;

$$I_1 = I_2 + G_1 V_1 + G_2 (V_1 - V_2)$$
$$I_2 + G_2 (V_1 - V_2) = G_3 V_2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_2 \\ I_2 \end{bmatrix}}$$

bu sistemin çözümü bize V_1 ve V_2 değerlerini verecektir.

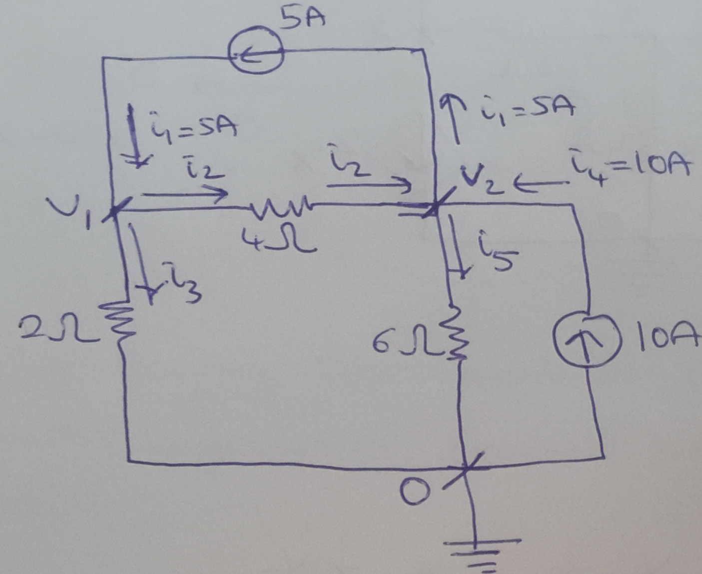
Ör:



→ Düğüm voltajlarını hesaplayınız.

(15)

Ç :



(1)'de, KCL uygularsak; $i_1 = i_2 + i_3 \Rightarrow 5 = \frac{V_1 - V_2}{4} + \frac{V_1 - 0}{2}$

$$3V_1 - V_2 = 20 \quad \text{---} \; (1)$$

(2)'de, KCL uygularsak; $i_2 + i_4 = i_1 + i_5$

$$\Rightarrow \frac{V_1 - V_2}{4} + 10 = 5 + \frac{V_2 - 0}{6} \Rightarrow -3V_1 + 5V_2 = 60 \quad \cdots (2)$$

(1) ve (2)'nin ortak çözümü bize V_1 ve V_2'yi verir.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 60 \end{bmatrix} \Rightarrow$$ AV = B sistemini çözmeliyiz.

Cramer yöntemini kullanırsak;

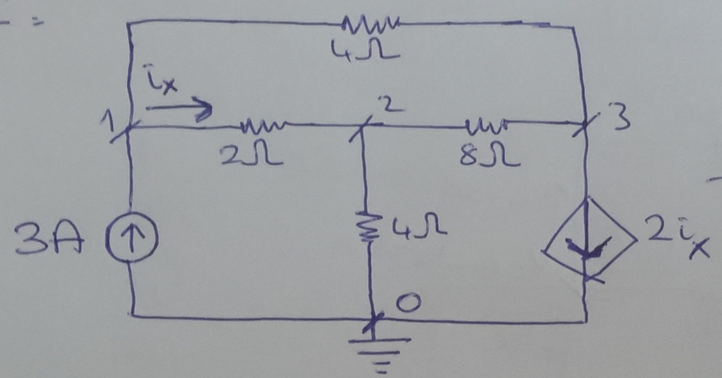
$|A| = 12$, $|A_1| = 160$, $|A_2| = 240$

$V_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{160}{12} = 13.333\,V$ ve $V_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{240}{12} = 20V$

$\Rightarrow i_1 = 5A$, $i_2 = -1.6668\,A$, $i_3 = 6.666A$, $i_4 = 10A$, $i_5 = 3.333\,A$

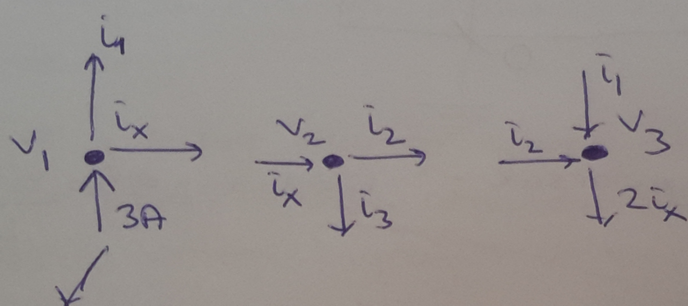
akımın yönü kabul ettiğimizin tersineymiş.

Ör:



→ Düğüm gerilimlerini bulunuz.

Ç:



KCL uygularsak;

$$3 = i_1 + i_x \Rightarrow 3 = \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_1 - v_2}{2} \Rightarrow 3v_1 - 2v_2 - v_3 = 12 \quad \text{(1)}$$

(2)'de KCL uygularsak;

$$i_x = i_2 + i_3 \Rightarrow \frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_2 - v_3}{8} + \frac{v_2 - 0}{4} \Rightarrow -4v_1 + 7v_2 - v_3 = 0 \quad \text{(2)}$$

(3)'de KCL uygularsak;

$$i_1 + i_2 = 2i_x \Rightarrow \frac{v_1 - v_3}{4} + \frac{v_2 - v_3}{8} = \frac{2(v_1 - v_2)}{2}$$

$$\Rightarrow 2v_1 - 3v_2 + v_3 = 0 \quad \text{...(3)}$$

(1), (2) ve (3)'ü Cramerle çözersek;

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 7 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow |A| = 10$, $|A_1| = 48$, $|A_2| = 24$, $|A_3| = -24$

$$\Rightarrow V_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{48}{10} = 4.8V \; , \; V_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 2.4V \text{ ve}$$

$$V_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-24}{10} = -2.4V$$

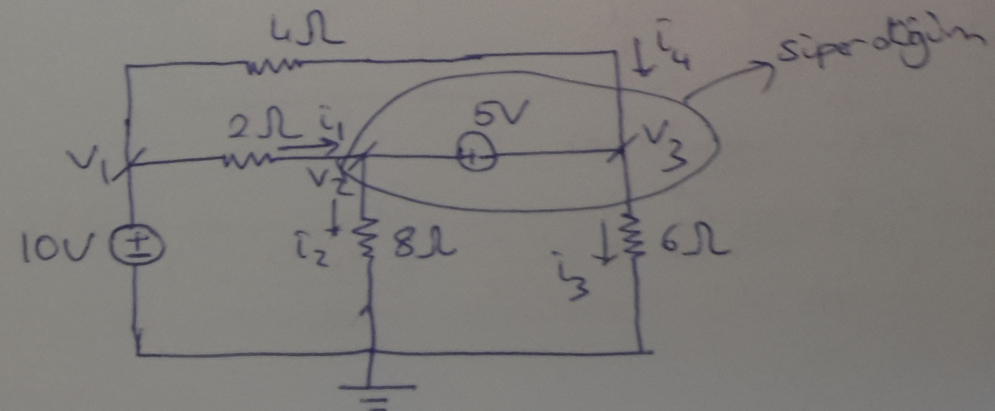
B) Voltaj Kaynağı Olan Devrelerde Düğüm Analizi :

Voltaj kaynağının devrede bulunması iki türlü incelenebilir ;

(1): Eğer , voltaj kaynağı kaynak düğümle kaynak olmayan herhangi bir düğüm arasında olursa , kaynak olmayan düğümdeki voltajı kaynağın voltajı olarak alırız.

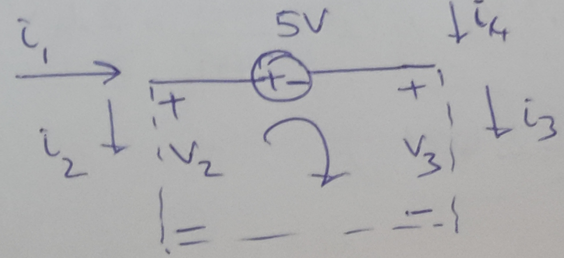
(2): Eğer , voltaj kaynağı kaynak olmayan iki düğüm noktası arasına konulursa , bu iki nokta bir süper düğüm noktası oluşturur. Voltajları bulmak için hem KCL hem de KVL uygularız.

Tanım : Herhangi iki kaynak olmayan düğüm noktası ve voltaj kaynağını içeren devre parçasına süper düğüm noktası denir.



Böyle bir devreyi çözerken aynı yöntemi kullanıyoruz fakat süper düğüme farklı davranıyoruz.

Süper düğüme önce KCL, sonra da KVL uygularız.



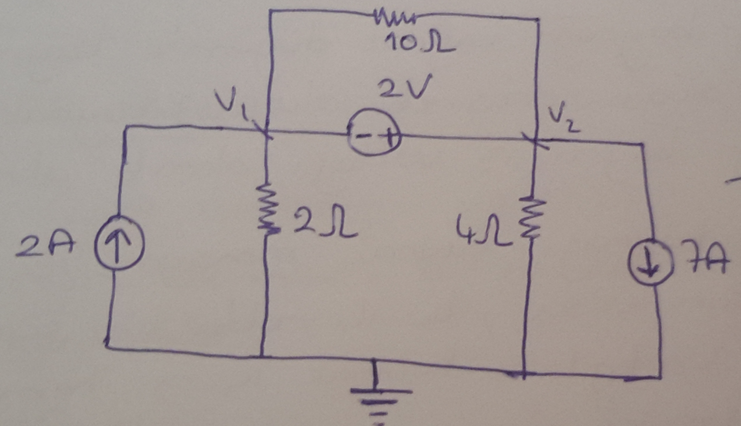
KCL'den;

$\rightarrow i_1 + i_4 = i_2 + i_3$

$$\frac{V_1 - V_2}{2} + \frac{V_1 - V_3}{4} = \frac{V_2 - 0}{8} + \frac{V_3 - 0}{6}$$

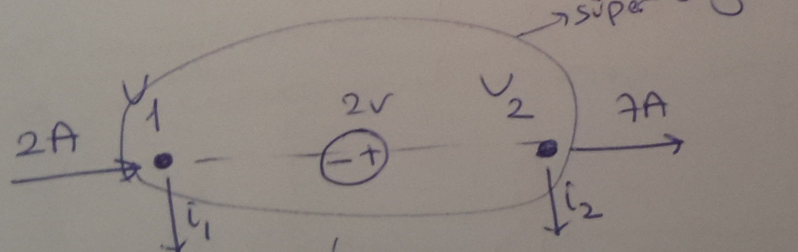
KVL'den: $-V_2 + 5 + V_3 = 0 \Rightarrow V_2 - V_3 = 5$

Ör:



→ Düğüm gerilimlerini bulunuz.

Ç:

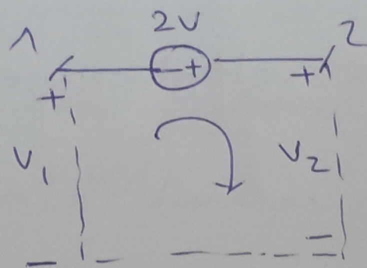


KCL uygularsak;

$$2 = i_1 + i_2 + 7 \Rightarrow 2 = \frac{V_1 - 0}{2} + \frac{V_2 - 0}{4} + 7$$

$\Rightarrow V_2 = -20 - 2V_1$

$\Rightarrow$



$\rightarrow$ KVL'yi uygularsak

$$-V_1 - 2 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = V_1 + 2$$

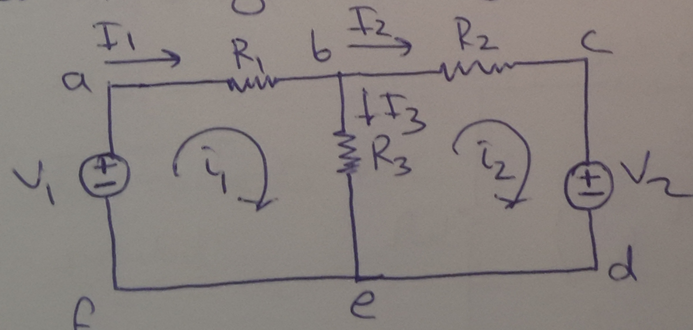
$$V_1 + 2 = -20 - 2V_1 \Rightarrow 3V_1 = -22 \Rightarrow V_1 = -7.333\,V$$

$$\Rightarrow V_2 = -5.333\,V$$

ÇEVRE ANALİZİ :

Amaç : Çevre akımlarını ve KVL'yi kullanarak devredeki bilinmeyen akımları bulmamızı sağlayan bir devre analiz yöntemidir.

Tanım (Çevre) : Devre içinde bulunan kendi içinde başka bir döngü içermeyen bir döngüdür.



$\rightarrow$ 2 tane çevre vardır.

A-) Akım Kaynağı İçermeyen Devrelerde Çevre Analizi :

Çevre analizini yapabilmek için aşağıdaki adımları takip etmeliyiz :

(1) : n tane verilen çevreye $i_1, i_2, \ldots, i_n$ çevre

akımlarını atayalım.

(2): Bütün çevrelere KVL'yi uygulayalım. Daha sonra Ohm Kanununu kullanarak voltajları çevre akımları türünden ifade ederiz.

(3): Çevre akımlarını bulmak için elde ettiğimiz denklemleri çözeriz.

1. çevrede KVL uygularsak;

$$-V_1 + R_1 i_1 + R_3(i_1 - i_2) = 0 \Rightarrow (R_1+R_3)i_1 - R_3 i_2 = V_1$$

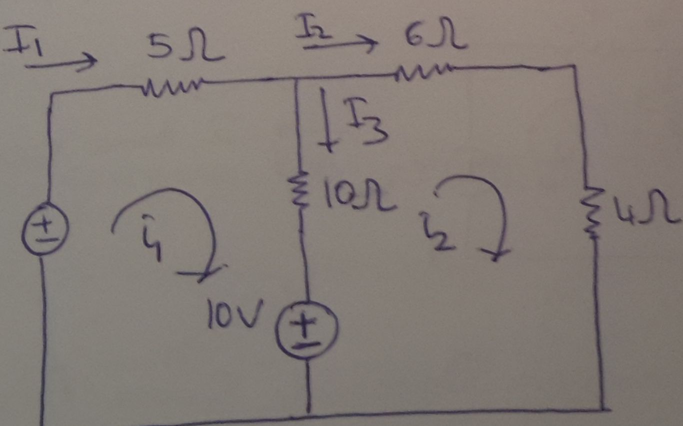
2. çevrede KVL uygularsak;

$$R_2 i_2 + V_2 + R_3(i_2 - i_1) = 0 \Rightarrow -R_3 i_1 + (R_2+R_3) i_2 = -V_2$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_2+R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

bu denklem sistemi çözülerek i_1 ve i_2 çevre akımlarını buluruz.

Ör:



→ I_1, I_2, I_3'ü bulunuz.

Ç: 1. çevrede KVL uygularsak;

$$-15 + 5i_1 + 10(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

$\Rightarrow 3i_1 - 2i_2 = 1$ 'dir.

2. çevrede KVL uygularsak;

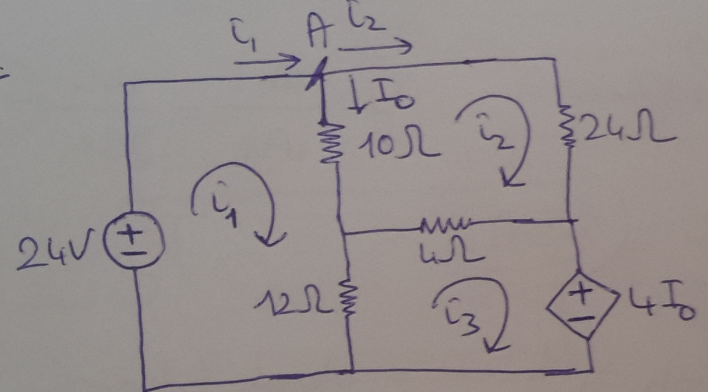
$6i_2 + 4i_2 + 10(i_2 - i_1) - 10 = 0 \Rightarrow i_1 = 2i_2 - 1$

$i_1 = i_2 = 1A$ bulunur.

$I_1 = i_1 = 1A$, $I_2 = i_2 = 1A$ ve $I_3 = i_1 - i_2 = 1 - 1 = 0$

olarak bulunur.

Ör:



→ I_o'ı bulunuz.

Ç: * 1. çevrede KVL'yi uygularsak;

$-24 + 10(i_1 - i_2) + 12(i_1 - i_3) = 0$

$\Rightarrow 11i_1 - 5i_2 - 6i_3 = 12 \quad \ldots (1)$

* 2. çevrede KVL'yi uygularsak;

$24i_2 + 4.(i_2 - i_3) + 10.(i_2 - i_1) = 0$

$\Rightarrow -5i_1 + 19i_2 - 2i_3 = 0 \quad \ldots (2)$

* 3. çevrede KVL'yi uygularsak;

$4I_o + 12(i_3 - i_1) + 4.(i_3 - i_2) = 0 \quad \ldots (3)$

Öte yandan, A düğümünde KCL'den, $I_o + i_2 = i_1 \Rightarrow$

$I_0 = i_1 - i_2$ 'dir. $\longrightarrow$ (3)'de yazarsak;

$4(i_1-i_2)+12(i_3-i_1)+4(i_3-i_2)=0$

$\Rightarrow -i_1 - i_2 + 2i_3 = 0$ 'dır. ...(3)

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 11 & -5 & -6 \\ -5 & 19 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$|A| = 192$, $|A_1| = 432$, $|A_2| = 144$, $|A_3| = 288$

$\Rightarrow i_1 = \dfrac{|A_1|}{|A|} = \dfrac{432}{192} = 2.25A$, $i_2 = \dfrac{|A_2|}{|A|} = \dfrac{144}{192} = 0.75A$

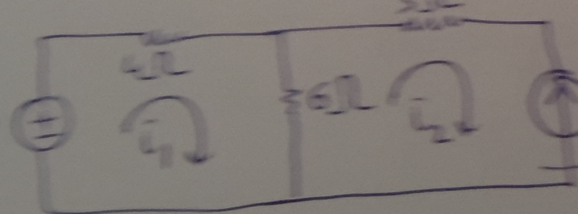
$i_3 = \dfrac{|A_3|}{|A|} = \dfrac{288}{192} = 1.5A$

$\Rightarrow$ O halde, $I_0 = i_1 - i_2 = 1.5A$ olarak bulunur.

B.) Akım Kaynağına Sahip Devrelerde Çevre Analizi:

İki durum söz konusu olabilir;

(1): Akım kaynağı sadece 1 çevrede bulunabilir.



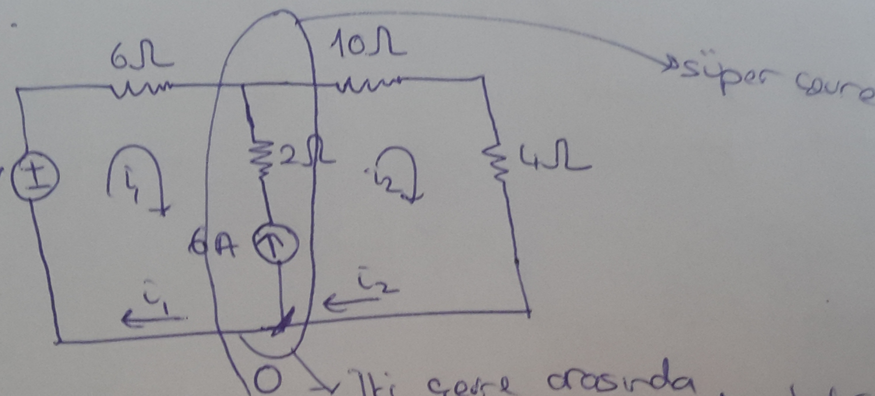
sadece 2. çevrede akım kaynağı var.

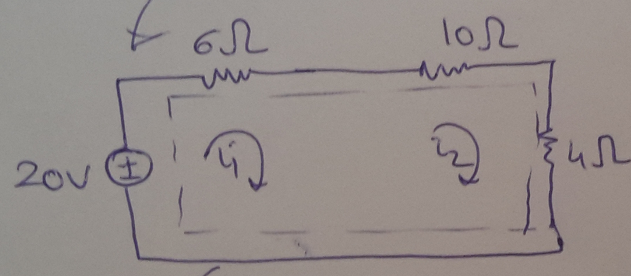
$i_2 = -5A$ olarak ayarlarız ve 1. çevrede KVL uygularız;

$-10 + 4i_1 + 6(i_1 - i_2) = 0 \Rightarrow i_1 = -2A$

(19)

(2): Bir akım kaynağı iki çevre arasında kalabilir. Böyle bir durumda, bu ortak akım kaynağı ve bu akım kaynağıyla seri bağlı olan elemanları devre dışı tutarız.





KVL uygularsak; $-20+6i_1+10i_2+4i_2=0$

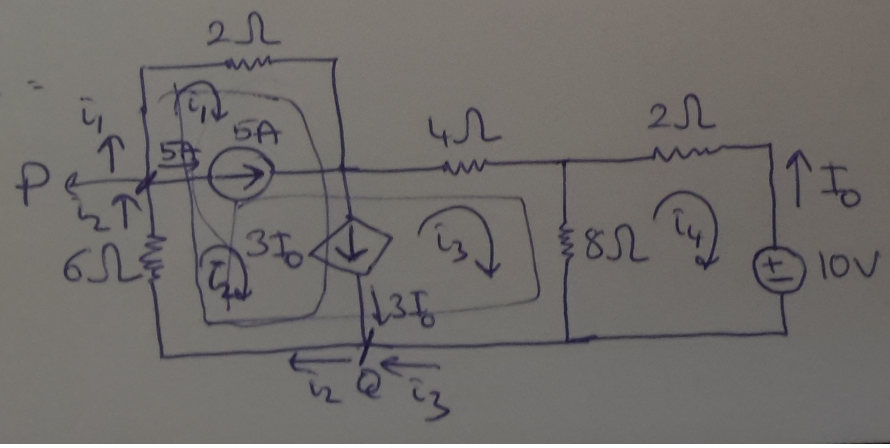
$\Rightarrow 6i_1+14i_2=20$ - - - - (1)

O'de KCL uygularsak;

$i_2=i_1+6 \Rightarrow i_2-i_1=6$ - - - (2)

(1) ve (2)'den; $i_1=-3.2A$ ve $i_2=2.8A$

Ör:



Ç: 2 çevrenin kesişiminden daha büyük bir süper çevre oluşur. KVL uygularsak;

$2i_1 + 4i_3 + 8(i_3 - i_4) + 6i_2 = 0$

$\Rightarrow i_1 + 3i_2 + 6i_3 - 4i_4 = 0 \quad \text{---}(1)$

P'de KCL uygularsak; $i_2 = i_1 + 5 \quad \text{---}(2)$

Q'da KCL uygularsak; $i_2 = i_3 + 3I_0 \longrightarrow I_0 = -i_4$ old.'dan;

$i_2 = i_3 - 3i_4$ olur. $\text{---}(3)$

4. çevrede KVL uygularsak;

$2i_4 + 8.(i_4 - i_3) + 10 = 0 \Rightarrow 5i_4 - 4i_3 = -5 \quad \text{---}(4)$

$i_1 = -7.5A$, $i_2 = -2.5A$, $i_3 = 3.93A$, $i_4 = 2.143A$